Тәжірибелік сабақ 10

Эллиптікалық теңдеулер. Лаплас теңдеуінің фундаменталдық шешімі. Гармониялық функциялар

Эллиптик типтегі теңдеулердің ең қарапайымы және негізгісі Лаплас

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (1)$$

және Пуассон

$$\Delta u = f(x) \qquad (2)$$

теңдеулері.

E^n кеңістігінде S сырт пен шенелген шекті немесе шексіз D облысын қараймыз. Егер $u(x0 = u(x_1,...,x_n)$ функция шекті D облысында екі рет үздіксіз дифференциалданатын болып, Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, $u(x)$ ты D облыста *гармониялық функция* деп атайды.

Егер $u(x)$ функция кеңістіктің мейлінше кіші аймағында, яғни центрі сол нүктеде болған жеткілікті кіші радиусты шарда гармониялық болса, онда сол нүктеде *гармониялық* деп аталады.

Егер $u(x)$ функция шексіз D облыстың координата басынан шекті қашықтықта жатқан кез – келген х нүктесінде гармониялық болып, жетерліктей үлкен $|x|$ тер үшін $\left(|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\right)$

$$|u(x)| \le \frac{c}{|x|^{n-2}}, \qquad c - const$$

теңсіздік орындалса, $u(x)$ функция шексіз D облыста гармоник деп аталады.

1-мысал. $z > 0$ жартылай кеңістікте Лаплас теңдеуін $\Delta u(x, y, z) = 0$ және

$$u(x,y,z)\big|_{z=0}=\begin{cases}1, & \textit{егер} \quad \xi^2+\eta^2<1;\\ 0, & \textit{егер} \quad \xi^2+\eta^2>1;\end{cases}$$

шартын қанағаттандыратын температураның стационарлық үлестірілуін табыңдар.

Шешуі. (79) – формуланы пайдаланып:

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1}\frac{d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{80}$$

функциясын табамыз.

Бізге $z>0$ жартылай өсте температураның стационарлық үлестірілуін табу қажет. Демек, (80) – формулада $x=0$, $y=0$ болады, яғни

$$u(0,0,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1}\frac{d\xi d\eta}{\left(\xi^2+\eta^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Енді бұл интегралды полярлық координаталар жүйесінде есептейік:

$$\xi=r\cos\varphi, \quad \eta=r\sin\varphi.$$

Сонда

$$u(0,0,z)=\frac{z}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\varphi}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{2\pi}\int_0^1\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=z\int_0^1\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{2}\int_0^1\left(r^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(r^2+z^2\right)=-z\left(r^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1=$$

$$=z\left[\frac{1}{z}-\left(1+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=1-\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Сонымен, ізделінді функция:

$$u(0,0,z)=\frac{\sqrt{1+z^2}-z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

теңдігі түрінде жазылады.